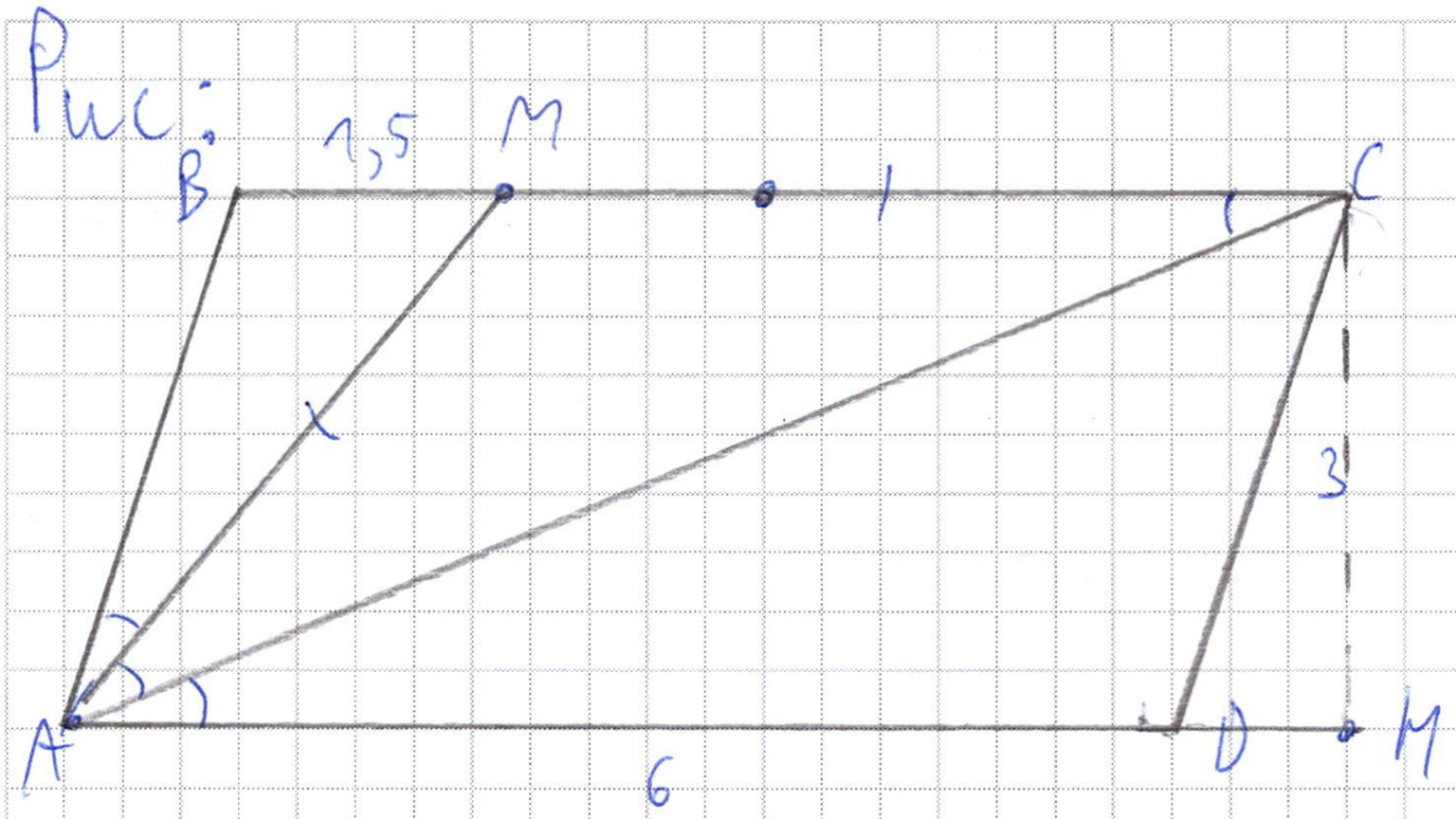
Рис:



Решение:

Пусть диагональ которая делит $\angle C$ отн. 1:3 $\Rightarrow$ то $AC \Rightarrow \angle CAD = 2$; $\angle BAC = 2\alpha$. Проведем биссектрису AM угла $\angle BAC \Rightarrow$ т.к. $\angle CAD = \angle BCA = 2$ и $\angle MAC = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$ то $AM = MC$; $\triangle ABM$ и $\triangle ACD$ подобны с коэффициентом 2 $\Rightarrow$ $BM = 1,5 \Rightarrow$ $CM = 6 - 1,5 = 4,5 \Rightarrow AM = 4,5 \Rightarrow$

$\frac{BM}{AM} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{1,5}{4,5} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = 9$; Опустим высоту CH на $AD \Rightarrow CH = h$; $DH = x$;

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 3^2 \\ h^2 + (6+x)^2 = 9^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 + x^2 = 9 \\ h^2 + x^2 + 12x + 36 = 9^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$9 + 36 + 12x = 81 \Rightarrow 12x = 36 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$

$h^2 + 9 = 9 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow$ такого параллелограмма не существует.

(Изначально $\angle BAC = 2\angle CAD$ т.к. в треугольнике $\triangle ABC$: $AB = \frac{BC}{2} \Rightarrow \angle BAC > \angle BCA \Rightarrow \angle BAC > \angle CAD \Rightarrow$ $2\angle CAD = \angle BAC$, а не $2\angle BAC = \angle CAD$)

olymp.bmstu.ru

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

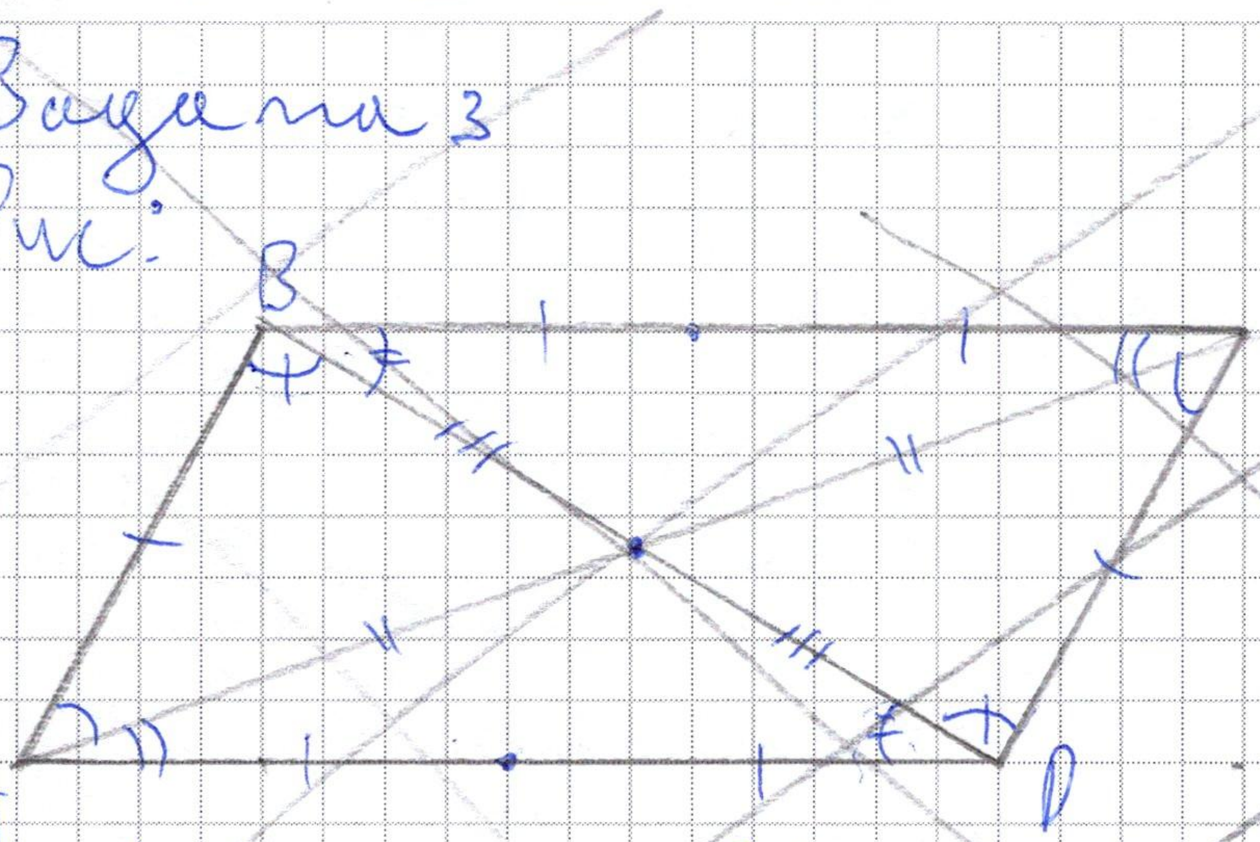
Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 4

Задача 3

Рис:



Решение:

$AB = 3$; $BC = 6$ =>

Рассмотрим 2 случая:

1. Когда $\angle BAC = 2\angle DAC$

2. Когда $2\angle DBC = \angle DBA$

1. Положим $\angle CAD = \alpha$ => $\angle CAB = 2\alpha = \angle ACD$ =>

по теореме синусов в $\triangle ACD$:

$\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\sin 2\alpha}{6}$ => $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2$; Мы знаем

что $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha$ => $\cos\alpha = 1$ =>

$\alpha = 0$ => противоречие.

2. Положим $\angle DBA = 2\alpha$; $\angle DBC = \alpha$

Задача 3

Можно использовать оборот листа для записи решений

$$\frac{S}{v_1+v_2+v_3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\right)}{2}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{2S}{v_1+v_2+v_3}=\frac{4}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}}=\frac{4}{\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}}=$$

$$=\frac{4}{\frac{4+3+2}{36}}=\frac{4\cdot 36}{9}=16 \text{ мин}$$

Ответ: 16 мин.

Задача 2

$(y-2)(3x-12)=5x^2-21x+4 \Rightarrow$

$(3x-12)y-6x+24=5x^2-21x+4 \Rightarrow$

$3(x-4)y=5x^2-15x-20 \Rightarrow$

$y=\frac{5(x-4)(x+1)}{3(x-4)}$, (если $x\neq 4$) $\Rightarrow$

$y=\frac{5(x+1)}{3} \Rightarrow x+1:3 \Rightarrow x \bmod 3=2 \Rightarrow$

Ответ: если $x=4$, то y - любое, если $x\neq 4$ то целые решения встречаются только если $x \bmod 3=2$, а y в тех случаях равен $\frac{5(x+1)}{3}$

Задача 1

Обозначим их скорости скедания за v_1, v_2, v_3 и пог километры за S; $t_1 = 9$ мин; $t_2 = 12$ мин; $t_3 = 18$ мин.

София – v_1; Арсений v_2; Рома – v_3 =>

$(v_1 + v_2)t_1 = (v_2 + v_3)t_2 = (v_1 + v_3)t_3 = S$ =>

$v_3 t_2 - v_3 t_3 = v_1 t_2 - v_2 t_2$ =>

$v_3 = \frac{v_2 t_2 - v_1 t_3}{t_2 - t_3} = 2v_2 - 3v_1$

$v_2(t_1 - t_2) = v_3 t_2 - v_1 t_1$ => $v_2 = \frac{12v_3 - 9v_1}{-3} =$

$3v_1 - 4v_2$ => $v_3 = 2(3v_1 - 4v_3) - 3v_1 =$ =>

$v_3 - 3v_1 = 8v_3$ => $7v_3 = 3v_1$

$(v_1 + v_2)t_1 = (v_2 + v_3)t_2 = (v_1 + v_3)t_3 = S$ =>

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{S}{t_1} \\ v_1 + v_3 = \frac{S}{t_3} \\ v_2 + v_3 = \frac{S}{t_2} \end{cases} \Rightarrow 2(v_1 + v_2 + v_3) = S\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)$$

$t_x = \frac{2S}{v_1 + v_2 + v_3}$ => Найдём t_x

Задача 4

$$\left|\frac{x^3-3x+x^2+4x+4-x^3-6}{x+\frac{\sqrt{2}\cdot 3}{\sqrt{2}}-1}\right| = a^2+1 \quad т.к.\ a^2+1>0 \Rightarrow$$

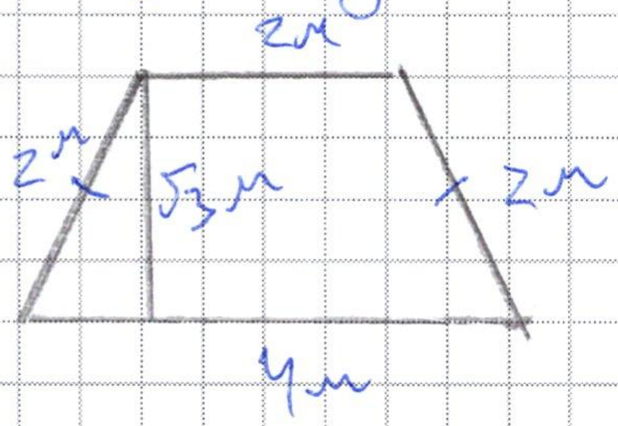
$$\left|\frac{x^2+x-2}{x+2}\right| = a^2+1 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{x+2} = a^2+1 \Rightarrow$$

$x = a^2+2 \Rightarrow x>0 \Rightarrow$ нету такого а где $x<0$

Задача 6

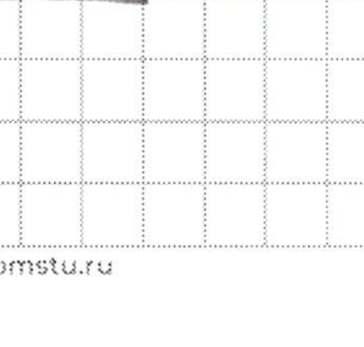
Вся начала посчитаем сколько по отдельности каждая фигура имеет площадь поверх. сечения.

Треугольный:



$$S_\Delta = S_1 = 3\cdot\sqrt{3}\ м^2$$

Полукруглый:

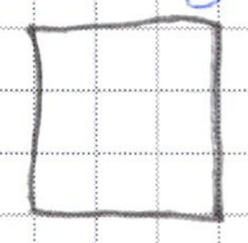


Длина круга: $D = 2\cdot\sqrt{3\pi\sqrt{3}}\ м \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{\pi\cdot 3\sqrt{3}} = 2\pi r \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} \Rightarrow S_0 = S_2 = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\pi} = \underline{3{,}9\sqrt{3}\ м^2}$$

Квадратный



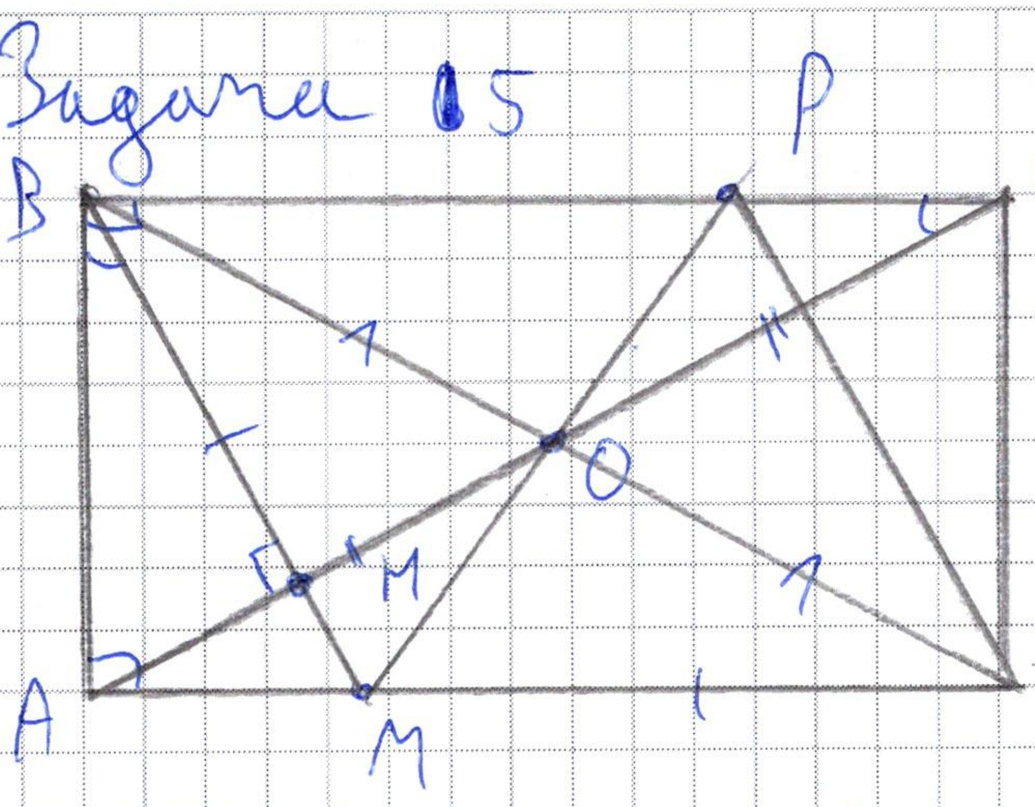
$$S_\square = S_3 = \left(\frac{9\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \underline{9\sqrt{3}}$$

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Вариант задания 7

Задача 05



Пусть $BM = x$, $AB = a$, $BC = b = 7$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3,2^2 \\ a^2 + (b-x)^2 = x^2 \end{cases}$$

из подобия $\triangle ABM$ и $\triangle BCA$: $a/x = b/3,2 \Rightarrow$

$bx = 3,2a$; но

$a^2 + b^2 - 2abx = 0 \Rightarrow 3,2^2 = 2bx \Rightarrow bx = \frac{3,2^2}{2} \Rightarrow$

$3,2a = \frac{3,2^2}{2} \Rightarrow a = \frac{3,2}{2} \Rightarrow b = \sqrt{3} \cdot \frac{3,2}{2} \Rightarrow$

$x = \frac{3,2^2}{2b} = \frac{3,2^2 \cdot 2}{2 \cdot 3,2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3,2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ Проектим $DB \Rightarrow$

$BO = OD$, также т.к. O – центр прямоугольника

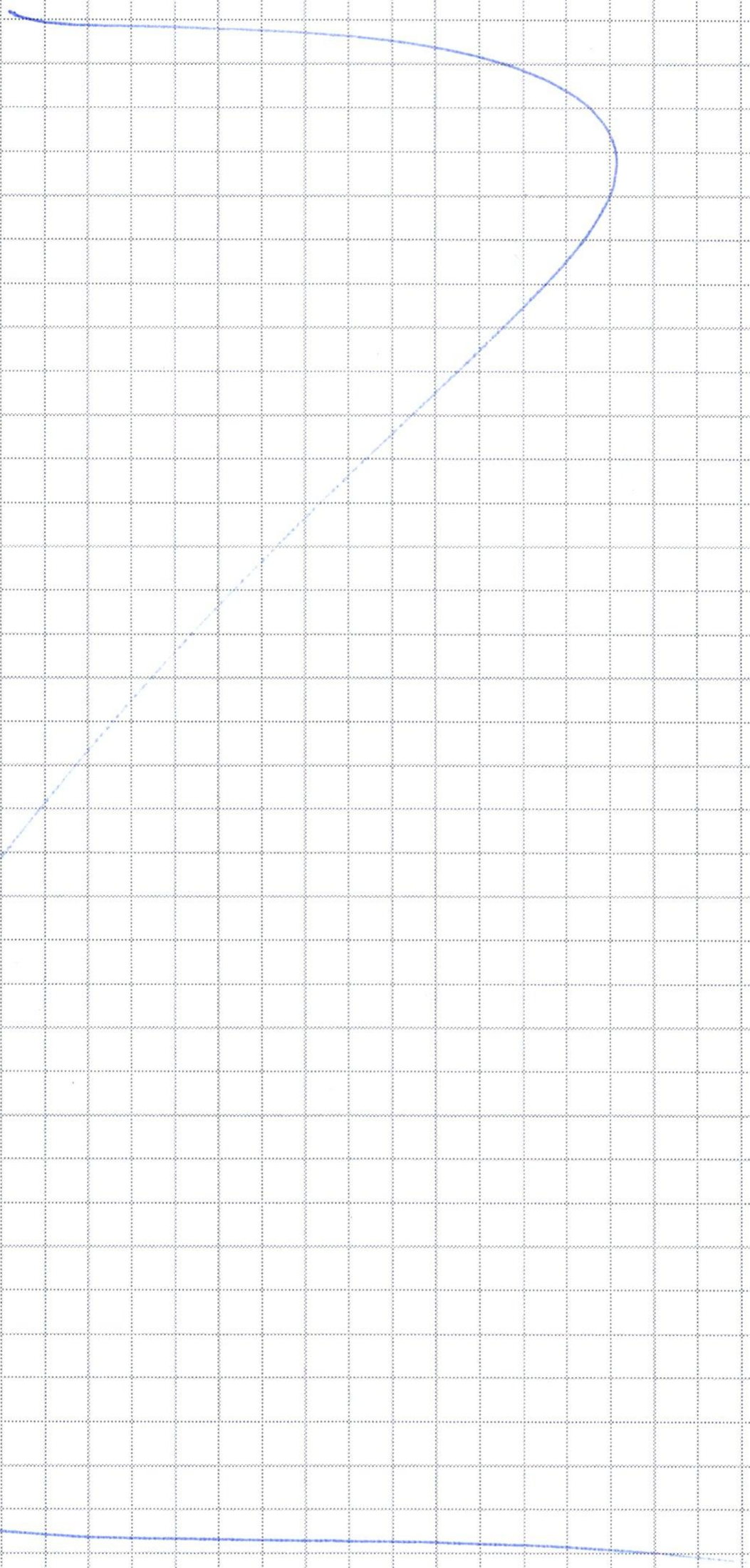
$MO = OP' \Rightarrow MBPD$ – п-мм. $\Rightarrow PD = BM = x = \frac{3,2}{\sqrt{3}}$

из-за подобия $\triangle ABM$ и $\triangle MBA$:

$\frac{AM}{a} = \frac{b-x}{x} \Rightarrow AM = \frac{3,2\left(\sqrt{3}\frac{3,2}{2} - \frac{3,2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}{3,2} \Rightarrow$

$\frac{3 \cdot \frac{3,2}{2} - 3,2}{2} = \frac{\frac{3,2}{2}}{4} = \frac{3,2}{8} \Rightarrow AM = 0,8$

Можно использовать оборот листа для записи решений



Задача 6 (Продолжение)

Мы должны взять в каких-то целых чтобы сумма поперечных сечений была равна $150\sqrt{3}$:

$3\sqrt{3}a + 3\sqrt{3}b + 9\sqrt{3}c = 150\sqrt{3} \Rightarrow$

$a+b+3c = 50$ и итоговая цена:

$X = 3a + 2b + 6c$

Пример:

если купить 49 полукруглых и 1 трапецивидную то сумма пол. сечений будет ~~$49 \cdot 2 + 3 = 101$~~

$(49 \cdot 3 + 3)\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$, а цена этого $49 \cdot 2 + 3 = 101$

Оценка:

Мы гарантированно покупаем 1 трапецивидную, сумма пол. сечений оставшихся желобов равна $147\sqrt{3}$, можно заметить что максимальное отношение пол. сечения желоба к его цене равно $1,5\sqrt{3} \Rightarrow$ минимальная цена желобов с суммой пол. сечения $147\sqrt{3}$ равна $\frac{147\sqrt{3}}{1,5\sqrt{3}} =$

$\frac{147 \cdot 2}{3} = 49 \cdot 2 = 98 \Rightarrow$ меньше чем за 101 купить желоба с суммой пол. сечения $150\sqrt{3}$ нельзя. Ответ: 101